Intégrale généralisée

Mohamed CH-CHAOUI
SMIA 2023

Plan

- L'intégrale de Riemann est définie pour toute fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné $[a\,;\,b]$.
- Il est alors naturel de se poser la question de savoir si cette notion peut être généralisée pour permettre la définition de l'intégrale d'une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle quelconque.
- Dans ce chapitre, nous allons donner une réponse à cette question pour une classe de fonctions localements intégrables.

Définition

On appelle intégrale généralisée (où impropre) l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle non borné où l'intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné.

Exemple

$$\int \frac{1}{x^n} dx \quad sur \quad]0,1] \quad où\ sur \quad [1,\infty[$$

Définition

On dira qu'une fonction f est localement intégrable sur un intervalle quelconque I si elle est intégrable surtout intervalle fermé borné $[a;b] \subset I$.
La définition et les propriétés de l'intégrale de Riemann sur un segment fermé borné [a ; b] sont supposés connus.

Dans tout ce chapitre, sauf mention du contraire, J désignera un intervalle de la forme $[a;b[$ ou $]b;a]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.
Pour toute fonction f localement intégrable sur J, on notera $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Plan

Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur J.

1. *On dit que l'intégrale de f sur J est convergente si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ *existe et est finie. Dans le cas contraire, on dira que l'intégrale de f sur J est divergente.*
2. *Si l'intégrale de f est convergente sur $J = [a; b[$, on pose*

$$\int_J f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^+} \int_a^x f(t)dt$$

3. *Si l'intégrale de f est convergente sur $J =]b; a]$, on pose*

$$\int_J f(t)dt = \int_b^a f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_x^a f(t)dt$$

*L'intégrale $\int_J f(t)dt$ est appelée **intégrale généralisée** de f sur J.*

Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur $I =]b_1; b_2[$ avec $b_1; b_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dira que l'intégrale de f est convergente sur I s'il existe un réel $c \in I$ tel que les intégrales $\int_{b_1}^{c} f(t)dt$ et $\int_{c}^{b_2} f(t)dt$ sont convergentes, on pose alors

$$\int_I f(t)dt = \int_{b_1}^{b_2} f(t)dt = \int_{b_1}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{b_2} f(t)dt$$

Remarques

- *La dénition ci-dessus ne dépend pas du choix du réel c.*
- *Dans ce qui suit, l'expression "étudier la nature de $\displaystyle\int_J f(t)dt$" est un raccourci pour "étudier la convergence de l'intégrale de f sur J".*
- *Si $\int_J f(t)dt$ est convergente, comme dans le cas des intégrales de Riemann, on adopte la convention $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.*

Proposition

1. *Soit f localement intégrable sur J. Si $\int_J f(t)dt$ est convergente alors, pour tout $c \in J$, on a la relation de Chasles*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

2. *Si f et g sont localement intégrables sur J et si $\int_J f(t)dt$ et $\int_J g(t)dt$ sont convergentes alors, pour tous $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$, $\int_J (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$ est convergente et on a*

$$\int_J (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_J f(t)dt + \beta \int_J g(t)dt$$

3. *Soit $0 < \alpha \leq +\infty$ et f localement intégrable sur $]-\alpha; \alpha[$. Alors :*
   - *Si f est paire alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\int_0^{\alpha} f(t)dt$ est convergente et dans ce cas :*

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2\int_0^{\alpha} f(t)dt$$

Exemples

- La fonction qui à $t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ localement intégrable sur $]0;1]$ et, pour tout $x \in]0;1]$, on a
$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2 - 2\sqrt{x};$$
et donc
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\to 0} 2 - 2\sqrt{x} = 2$$
- La fonction qui à $t \longrightarrow e^{-t}$ est localement intégrable sur $[0;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, on a
$$\int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x};$$
et donc
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}(1 - e^{-x}) = 1$$
- La fonction qui à $t \longrightarrow \sin t$ est localement intégrable sur $]-\infty, 0]$ et, pour tout $x < 0$,
$$\int_x^0 \sin t dt = \cos x - 1$$
or $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x$ n'existe pas donc $\int_{-\infty}^0 \sin t dt$ diverge.

- La fonction qui à $t \longrightarrow \dfrac{1}{1+t^2}$ est localement intégrabl sur $]-\infty;+\infty[$ et, pour tout $x>0$ et $y<0$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x \quad et \quad \int_y^0 \frac{1}{1+t^2}dt = -\arctan y;$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{y\to-\infty} (-\arctan y) = \frac{\pi}{2};$$

Finalement,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi$$

- Nous allons étudier la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2-1}$. La fonction qui à $t \longrightarrow \dfrac{1}{t^2-1}$ est localement intégrable sur $]-1;1[$ et est paire, donc étudier la nature de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2-1}$ est équivalent à étudier la nature de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2-1}$. Or, pour tout $x \in [0;1[$, on a

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = -\infty$$

En conclusion, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2-1}$ n'est pas convergente.

Remarque

Attention, si f est localement intégrable sur $]-\infty;+\infty[$, la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est équivalente à la convergence des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$. Il est alors important de noter que l'existence de la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$ n'entraîne pas la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.
Par exemple, pour tout $x>0$, on a

$$\int_{-x}^{x} \sin t dt = 0;$$

(car la fonction $t \longrightarrow \sin t$ est impaire). Néanmoins, on a vu en (3) que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt$ n'est pas convergente. En effet, pour tout $x>0$,

Nous allons finir cette section par la donnée d'une classe importante d'intégrales généralisées connues sous le nom d'intégrales de Riemann. Ces intégrales généralisées sont très utiles lors des tests de comparaison (Voir Corollaires (1) et (2)

Exemple

(Intégrales de Riemann)

- *On considère l'intégrale généralisée*

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \textit{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $x \in]0;1]$, *on a*

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} -\ln x & \textit{si} \quad \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}) & \textit{si} \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ *et*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad \alpha < 1; \\ +\infty & \textit{si} \quad \alpha > 1; \end{cases}$$

on déduit que

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \alpha < 1 \tag{1}$$

et dans ce cas,

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

- On considère l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}; \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha < 1; \\ 0 & \text{si} \quad \alpha > 1; \end{cases}$$

on déduit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \alpha > 1 \tag{2}$$

et dans ce cas,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

r

Remarque

L'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

n'est jamais convergente.

Plan

Soit f une fonction localement intégrable sur J. On suppose qu'il existe $c \in J$ tel que f garde un signe constant sur $I = [c; b[$ ou $I =]b; c]$. Comme les intégrales généralisées

$$\int_J f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_I f(t)dt$$

sont de même nature, on peut supposer que $I = J$.
Aussi les intégrales généralisées

$$\int_J f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_J (-f(t))dt$$

sont de même nature, on peut supposer que f est positive. Dans ce cas, l'étude de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_J f(t)dt$ est relativement simple et repose essentiellement sur les critères de convergence des intégrales généralisées qui suivent.
Ce sont des critères simples à vérifier et permettent de déduire la convergence d'une large classe d'intégrales généralisées.
Il est important de noter que ces critères ne sont valables que pour les fonctions qui gardent un signe constant au voisinage de b.

Nous allons énoncer ces critères pour les fonctions positives.

Proposition

(Critère de comparaison)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur J telles que, pour tout $x \in J$ on a $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Alors :

1. *Si $\displaystyle\int_J g(x)dx$ converge alors $\displaystyle\int_J f(x)dx$ converge.*
2. *Si $\displaystyle\int_J f(x)dx$ diverge alors $\displaystyle\int_J g(x)dx$ diverge.*

Exemple

Soit $\alpha > 1$, *alors* $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} dt$ *est convergente. En effet, on a*

$$0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *est convergente car* $\alpha > 1$, *donc par comparaison* I *est convergente.*

Théorème

(Critère d'équivalence)

Soient f et g deux fonctions positives localement intégrables sur J. Alors :

1. *Si* $f \underset{b}{\sim} Mg$ *avec* $0 < M < +\infty$ *alors les intégrales généralisées* $\int_J g(x)dx$ *et* $\int_J f(x)dx$ *sont de même nature.*
2. *Si* $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *et* $\displaystyle\int_J g(x)dx$ *converge alors* $\displaystyle\int_J f(x)dx$ *converge*
3. *Si* $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *et* $\displaystyle\int_J g(x)dx$ *diverge alors* $\displaystyle\int_J f(x)dx$ *diverge.*

En prenant dans ce théorème $g(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ et en combinant (1) et (2) avec les résultats du Théorème (1), on obtient les deux corollaires très usuels suivants.

Corollaire

Soient $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction positive, localement intégrable sur* $]0, a]$ *avec*

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha f(t) = M$$

Alors :

1. *Si* $0 < M < +\infty$ *alors* $\displaystyle\int_0^a f(t)dt$ *est convergente si et seulement si* $\alpha < 1$.
2. *Si* $M = 0$ *et* $\alpha < 1$ *alors* $\displaystyle\int_0^a f(t)dt$ *est convergente.*
3. *Si* $M = +\infty$ *et* $\alpha \geq 1$ *alors* $\displaystyle\int_0^a f(t)dt$ *est divergente.*

Corollaire

Soient $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction positive, localement intégrable sur* $[a; +\infty[$ *avec*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} f(t) = M$$

Alors

1. *Si* $0 < M < +\infty$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.
2. *Si* $M = 0$ *et* $\alpha > 1$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente.*
3. *Si* $M = +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est divergente.*

Exemple

1. *Nous allons étudier la nature de*

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)\sin(t)}{t^\alpha}dt, \quad \alpha > 0$$

On a

$$0 \leq \frac{\ln(1+t)\sin(t)}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{t \times t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-2}}$$

or l'intégrale $\int \frac{1}{t^{\alpha-2}}$ *converge si et seulemnt si* $\alpha - 2 < 1$ *c.à.d* $\alpha < 3$, *on déduit*

$$I_\alpha \quad \text{converge si et seulemnt si} \quad \alpha < 3.$$

2. *Nous allons étudier la nature de*

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$$

La fonction $t \longrightarrow \dfrac{\ln t}{t^2+1}$ *est continue et positive sur* $[1;+\infty[$. *En plus,*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln t}{t^2+1} = 0$$

Donc, d'après le corollaire (2), l'intégrale I *est convergente.*

Plan

Définition

Soit f continue sur un intervalle quelconque I. On dira que $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_I |f(t)|dt$ est convergente.

Théorème

Soit f localement intégrable sur un intervalle quelconque I. Si $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a

$$\left|\int_I f(t)dt\right| \leq \int_I |f(t)|\, dt$$

Remarque

La réciproque est fausse, il existe des intégrales qui sont convergente mais pas absolument convergente, on les appelles intégrales semi-convergenes.

Définition

Soit f localement intégrable sur un intervalle quelconque I. On dira que $\int_I f(t)dt$ est semi-convergente si $\int_I |f(t)|dt$ est divergente et $\int_I f(t)dt$ est convergente.

Exemples

Nous allons montrer que

$$\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{\sin t}}dt$$

est absolument convergente. La fonction $t \longrightarrow \dfrac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{\sin t}}$ est continue sur $]0;1]$ et ne garde pas un signe constant au voisinage de 0.

On a

$$0 \leq \left| \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{\sin t}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\sin t}}$$

et

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sin t}} = 1$$

Donc, d'après le corollaire (1), $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\sin t}}$ est convergente. En utilisant le Théorème (2), on déduit que $\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{\sin t}} dt$ est absolument convergente et donc convergente.

L'étude des intégrales généralisées des fonctions dont le signe varie sur leur domaine de définition est plus difficile que celles gardant un signe constant. Le critère d'Abel, simple à retenir et à appliquer, permet de déduire la convergence des intégrales généralisées d'une large classe de telles fonctions.

Théorème

(Critère d'Abel)
Soient f et g localement intégrables sur $[a, +\infty[$ et telles que :

1. *la fonction g est décroissante à valeurs positives sur $[a, +\infty[$ avec*
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0;$$
2. *il existe un réel $M > 0$ tel que :*
$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad \left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq M$$

Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Exemple

En utilisant le critère d'Abel, nous allons montrer que, pour tout $0 < \alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ *est convergente.*
Posons

$$f(t) = \sin t \quad et \quad g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$$

on a d'une part la fonction $t \longrightarrow g(t)$ *est décroissante et* $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$.
D'autre part,

$$\forall x \in [1, +\infty[, \left| \int_1^x f(t) dt \right| = |\cos(x) + cos(1)| \leq 2$$

Les conditions du Critère d'Abel sont vérifiées et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ *est convergente.*

Dans le cas des intégrales généralisées, l'intégration par parties permet d'abord de déduire la convergence et, ensuite, comme dans le cas classique, de calculer les intégrales.

Théorème

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur J telles que $\lim_{t\to b} u(t)v(t)$ existe et est finie. Alors $\int_J u'(t)v(t)dt$ et $\int_J u(t)v'(t)dt$ sont de même nature et quand elles convergent on a

$$\int_J u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_J - \int_J u(t)v'(t)dt$$

Il important de noter que la notation $[u(t)v(t)]_J$ implique $\lim\limits_{t\to b} u(t)v(t)$. Ainsi, par exemple, si $J = [a; b[$, on a

$$[u(t)v(t)]_J = \lim_{t\to b} u(t)v(t) - u(a)v(a)$$

Remarque

Ce théorème est à utiliser avec précaution : on commence d'abord par calculer $\lim_{t \to b} u(t)v(t)$ *et étudier la convergence de l'une des deux intégrales* $\int_J u'(t)v(t)dt$ *et* $\int_J u(t)v'(t)dt$ *(la plus simple bien sûr), une fois on a la convergence on peut écrire l'égalité ci-dessus.*

Théorème

Soit ϕ *de classe* C^1 *et monotone sur* J *et* f *continue sur* $\phi(J)$*. Alors* $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$ *et* $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du$ *sont de même nature et quand elles convergent on a*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du$$

Remarque

Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en une intégrale généralisée et vise-versa. Par exemple, $\int_0^{\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$ *est transformée après le changement de variable* $u = \tan \frac{t}{2}$ *en* $\int_0^{+\infty} \frac{2du}{3+u^2}$.